**Bab 4**

**RUANG VEKTOR**

Dalam Bab Ini:

* Notasi
* RuangVektor
* Contoh-contohRuangVektor
* Kombinasi Linear; HimpunanRentangan
* Subruang
* Rentang Linear; RuangbarisdariMatriks
* Kebebasan Linear danketakbebasan linear
* Basis danDimensi
* Rank danMatriks
* JumlahdanJumlahLangsung

**Notasi**

Bab ini akan memperkenalkan struktur dasar aljabar linear, yaitu ruangv ektor berdimensi berhingga. Definisi ruang vektorV,yang elemen-elemennya disebut *vektor*, melibatkan sebarang medan K, yang elemen-elemennya disebut *skalar*.

Dalam bab ini akan digunakan notasi berikut (kecuali dinyatakan sebaliknya atau tersirat):

V ruang vektor yang diketahui

u, v, w vektor-vektor di dalam V

K medan bilangan yang diketahui

a, b, c atau K skalar-skalar di dalam K

Hampir tidak ada esensi yang hilang jika Anda mengasumsikan bahwa K adalah medan real **R**. Anda mungkin menduga bahwa garis real **R** mempunyai “dimensi” satu, bidang Cartesius **R**2 mempunyai “dimensi” dua, dan ruang **R**3 mempunyai “dimensi” tiga. Bab ini akan merumuskan notasi dari “dimensi”, dan definisi ini akan sesuai dengan intuisi anda.

Pada bagian selanjuntnya dari buku ini, kita akan menggunakan notasi himpunan beriut ini:

Elemen bagian dari himpunan

Elemen dan bagian dair himpunan

untuk setiap di dalam

Terdapat sebuah di dalam

adalah subhimpunan dari B

Irisan dari dan

Gabungan dari dan

Himpunan kosong

Ruang Vektor

Misalkan adalah himpunan takkosong dengan dua operasi:

1. **Penjumlahan vektor:** *Jumlah* di dalam berlaku untuk sebarang
2. **Perkalian skalar:***Hasilkali ku* berlaku untuk sebarang ,

Maka V disebut *ruang vektor* (pada medan K) jika aksioma-aksioma berikut berlaku untuk sebarang vector-vektor

[A1]

[A2] Terdapat sebuah vector di dalam V, dinotasikan dengan *vector nol,* sedmikian rupa sehingga untuk sebarang

[A3] Untuk tiap terdapat sebuah vector di dalam V, yang dinotasikan dengan –u, dan disebut *negatif*  dari *u*, sedeimkian rupa sehingga .

[A4]

[M1] , untuk sebarang scalar

[M2] , untuk sebarang scalar .

[M3] untuk sebarang scalar

.

[M4] untuk scalar satuan .

Aksioma-aksioma di atas secara alamiah terpecah menjadi dua himpunan (yang di tandai dengan perbedaan symbol A dan M pada aksioma-aksioma tersebut). EMpat aksioma pertama hanya berhubungan dengan struktur penjumlahan dari , dan dapat diringkas dengan mengatakan bahwa adalah *kelompok komutatif* pada operasi penjumlahan. Hal ini berarti :

1. Sebarang jumlah vektor-vektor tidak memerlukan tanda kurung dan tidak bergantung pada urutan penjumlahan.
2. Vektor nol 0 adalah unik, dan negative –*u* dari vector *u* juga unik.
3. (Hukum Pembatalan) Jika Sebarang jumlah vektor-vektor maka

Demikian pula, *pengurangan* pada *V*, di definisikan dengan di mana adalah nilai negative yang unik dari *v*.

**Teorema 4.1** : Misalkan *V* adalah ruang vector pada medan *K*.

1. Untuk sebarang scalar dan
2. Untuk dan sebarang vector ,
3. Jika di mana dan , maka atau
4. Untuk sebarang dan sebarang ,

Contoh-contoh Ruang Vektor

1. **Ruang *K****n* : Misalkan *K* adalah sebarang medan. Notasi *Kn* seringkali digunakan untuk menotasikan himpunan seluruh tupelo *n* yang terdiri dari elemen-elemen di dalam *K*. Di sini *Kn* adalah ruang vector pada *K* di mana berlaku operasi-operasi berikut :

**Penjumlahan Vektor:**

**Perkalian Skalar:**

Vektor nol di dalam Kn merupakan tupel *n* yang terdiri dari bilangan-bilangan nol, 0= (0, 0, …., 0) dan negatif dari sebuah vektor didefinisikan oleh

-(a1, a2, …., an) = (-a1, -a2, …., -an)

Amati bahwa operasi-operasi ini sama dengan operasi-operasi yang didefinisikan untuk **R**n pada Bab 1, yang sekarang dapat kita nyatakan bahwa **R**n berikut operasi-operasi yang didefinisikan di dalamnya adalah sebuah ruang vektor pada **R**.

(*b*)**Ruang Polinomial *P***(*t*): Misalkan ***P***(*t*) menotasikan himpunan seluruh polynomial real berbentuk

*p(t)* = a0 + t + a2t2 + …. + asts (s = 1,2, ..)

di mana koefisien *a*i adalah bagian dari medan *K*. Maka  *P(t)* adalah ruang vektor pada *K* di mana berlaku operasi-operasi berikut:   
**Penjumlahan Vektor**: Di sini *p(t) + q(t)* pada ***P****(t)* adalah operasi penjumlahan polynomial biasa.  
**Perkalian Skalar:** Di sini *kp(t)* pada ***P****(t)* adalah operasi perkalian biasa antara skalar *k* dengan polinomial *p(t).* Polinomial nol, 0, adalah vektor nol di dalam ***P****(t)*.

c.**Ruang Polinomial *P****n(t):*  Misalkan ***P****n(t)* menotasikan himpunan seluruh polinomial real *p(t)* pada medan *K*, di mana derajat dari *p(t)* kurang dari atau sama dengan *n*, yaitu

*p(t) =* a0 + a1t + a2t2 + … + asts   
di mana *s* ≤ *n*. Maka ***P***n(t) adalah ruang vektor pada *K* yang berkenaan dengan operasi-operasi biasa yang berupa operasi penjumlahan polinomial dan operasi perkalian antara sebuah polinomial dengan sebuah konstanta (sama seperti ruang vektor ***P***(t) di atas). Kita memasukkan polinomial nol, 0, sebagai sebuah elemen dari ***P****n(t)*, meskipun derajatnya tidak dapat didefinisikan.

d.**Ruang Matriks M**m,n: Notasi **M**m,n, atau disingkat **M**, akan digunakan untuk menotasikan himpunan seluruh matriks *m* X *n* dengan entri-entri di dalam medan *K*. Maka **M**m,n adalah ruang vektor pada *K* yang berkenaan dengan operasi-operasi biasa berupa operasi penjumlahan matriks dan operasi perkalian skalar matriks-matriks, seperti dinyatakan dalam Teorema 2.1.

**KOMBINASI LINEAR; HIMPUNAN RENTANGAN**

Misalkan V adalah ruang vektor pada medan K. Vektor v pada V adalah kombinasi linear dari vektor-vektor linear dari vektor-vektor u1, …, u2, …, um pada V jika terdapat skalar a­1, a2, …, am­ pada K sedemikian rupa sehingga v = a1u1 + a2u2 + … + amum. Dengan kata lain, v adalah kombinasi linear dari u1, …, u2, …, um jika terdapat solusi untuk persamaan vektornya v = x1u1 + x2u2 + … + xmum dimana x1, x2, …, xm­ adalah skalar-skalar yang tidak diketahui.

**Contoh 4.1.** (Kombinasi Linear di dalam R3) anggaplah kita bermaksud untuk menyatakan v = (3, 7, -4) di dalam R3 sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor.

u1 = (1, 2, 3) u2 = (2, 3, 7) u3 = (3, 5, 6)

kita akan menentukan skalar-skalar x, y, z sedemikian rupa sehingga v = xu1 + yu2 + xu3, yaitu :

dengan mereduksi sistem tersebut menjadi bentuk eselon akan menghasilkan

x + 2y + 3z = 3 x + 2y + z = 3

-y – z = 1 maka –y – z = 1

Y – 3z = -13 –4z = -12

Dengan substitusi balik akan menghasilkan solusi x = 2, y = -4, z = 3.

Sehingga

v = 2u1 – 4u2 + 3u3

Dalam bahasa yang umum, keinginan untuk menyatakan vektor yang diketahui v di dalam Kn sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor u1, u2, …, um di dalam Kn ekuivalen dengan menyelesaikan sistem persaamaan linear AX = B, dimana v adalah kolom B yang terdiri dari konstanta-konstanta, dan u adalah kolom-kolom dari matriks koefisien A. sistem seperti ini bisa mempunyai sebuah solusi unik (seperti di atas), banak solusi, atau tidak mempunyai solusi. Kasus yang terakhir – tidak mempunyai solusi – berarti bnahwa v tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari beberapa u.

Contoh 4.2. (Kombinasi linear pada P(t)) anggaplah kita bermaksud untuk menyatakan polinomial v = 3t2 + 5t – 5 sebagai kombinasi linear dari polinomial-polinomial p1 = t2 + 2t + 1, p2= 2t2 + 5t + 4, p3 = t2 + 3t + 6.

Kita menentukan skalar-skalar x, y, z sedemikian rupa sehingga v = xp1 + yp2 + zp3; dalam hal ini,

3t2 + 5t – 5 = x(t2 + 2t + 1) + y (2t2 + 5t + 4) + z (t2 + 3t + 6) (\*)

Terdapat dua cara untuk melanjutkan proses ini.

1. Perluaslah ruas kanan dari persamaan (\*) sehingga memperoleh :

3t2 + 5t – 5 = xt2 + 2xt + x + 2yt2 + 5yt + 4y + zt2 + 3zt + 6z

= (x + 2y + z)t2 + (2x + 5y + 3z) t + (x + 4y + 6z)

Tetapkan koefisien-koefisien dari *t* yang mempunyai pangkat yang sama agar koefisien tersebut sama antara satu dengan lainnya, dan reduksilah. Sistem tersebut menjadi bentuk eselon :

x+ 2y + z = 3 x + 2y + z = 3 x + 2y + z = 3

2x + 5y + 3z = 5 atauy *+* z = - 1 atau *y + z* = –1

*x +* 4y + 6z = -5 2y + 5z = - 8 3z = –6

Sistem ini sekarang berbentuk segitiga dan mempunyai sebuah solusi. Dengan substitusi balik akan menghasilkan solusi *x =* 3, *y =* 1, z = –2 sehingga

*v* = 3p1 + p2 – 2p3

1. Persamaan (\*) sebenarnya adalah sebuah identitas dalam variabel *t;* yaitu persamaan tersebut berlaku untuk sebarang nilai *t.* Kita dapat memperoleh tiga persamaan dalam tiga variabel tidak diketahui *x, y,* z dengan menetapkan *t* sama dengan sebarang tiga nilai. Sebagai contoh:

Tetapkan t = 0 di dalam (\*) untuk memperoleh : x+ 4y + 6z = -5

Tetapkan t = 1 di dalam (\*) untuk memperoleh : 4x + 11y + 10z = 3

Tetapkan t = –1 di dalam (\*) untuk memperoleh : y + 4z = –7

Dengan mereduksi sistem ini menjadi bentuk eselon dan menyelesaikannya kembali dengan substitusi balik, maka akan menghasilkan solus x = 3, y = 1, z = –2.

Dengan demikian v = 3p, + p2 – 2p3.

Misalkan V adalah ruang vektor pada K. Vektor-vektor u1, u2, ... um di dalam V dikatakan *merentang* (span) V atau membentuk himpunan rentangan *(spanning set)* dari V jika setiap *v* di dalam V adalah kombinasi linear dari vektor-vektor u1, u2, ..., Um*,* yaitu jika terdapat skalar a1, a2, ..., am di dalam *K* sedemikian rupa sehingga v = a1u1 +a2u2 + ... + amum.

Anggaplah u1, u2, ..., um merentang V. Maka, untuk sebarang vektor *w,* himpunan w, u1, u2, ..., um juga merentang V.

Anggaplah u1, u2, ..., um merentang V dan anggaplah uksebagai kombinasi linear dari beberapa *u* lainnya. Maka u tanpa ukjuga merentang V.

Anggaplah u1, u2, ..., um merentang V dan anggaplah salah satu *u* adalah vektor nol. Maka *u* tanpa vektor nol juga merentang V.

**Contoh 4.3.** Perhatikan ruang vektor V = R3.

1. Kita dapat meyakini bahwa vektor-vektor berikut membentuk himpunan rentangan dari R3.

e1 = (1, 0, 0), e2 = (0, 1, 0), e3 = (0, 0, 1)

Secara spesifik, jika *v = (a, b, c)* adalah sebarang vektor di dalam R3, maka :

v = ae1 + be2 + ce3

Sebagai contoh, *v =* (5, -6, 2) = 5e1 – 6e2 + 2e3

1. Kita dapat meyakini bahwa vektor-vektor berikut juga membentuk himpunan rentangan dari R3.

W1 = (1, 1, 1), w2 = (1, 1, 0), w3 = (1, 0, 0)

Secara spesifik, jika v = (a, b, c) adalah sebarang vektor di dalam R3, maka

v = (a, b, c) = cw1 + (b - c)w2 + (a - b)w3

Sebagai contoh, *v =* (5, -6, 2) = 2w1 - 8w2 + 11w3,

1. Kita dapat menunjukkan bahwa v = (2, 7, 8) tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor

u1 = (1, 2, 3), u2 = (1, 3, 5), u3 = (1, 5, 9)

Dengan demikian, u1, u2, u3 tidak merentang R3.

**Contoh 4.4.** Perhatikan ruang vektor V = Pn(t) yang terdiri dari seluruh polinomial berderajat ≤ n.

Dengan jelas setiap polinomial di dalam Pn(t)dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari n + 1 polinomial 1, t, t2, t3, ..., tn

Sehingga pangkat-pangkat dari *t* ini (dimana 1 =*t®)* mambentuk himpunan rentang untuk Pn(*t*)

1. kita juga dapat menunjukkan bahwa untuk sembarang scalar *c*, pangkat - pangkat *n* + 1 dari *t – c* berikut ini,

1, *t - c, (t – c , ( t – c, ….., (t – c)*

(dimana (*t – c)® = 1 )* juga membentuk himpunan rentangan untuk Pn (t) .

Contoh 4.5. perhatikan ruang vector M = M2.2 yang terdiri dari semua matriks 2perhatikan pula keempat matriks a di dalam M dapat di tulis sebagai kombinasi linier dari keempat matriks tersebut. Sebagai Contoh,

*= =*

Maka jelaskan bahwa sbarang matriks *A* di dalam M dapat ditulis sebagai kombinasi sebagai kombinasi linier dari keempat matriks tersebut . Sebagai contoh,

A = = 5 – 6 + 7 + 8

Dengan demikian, keempat matriks , , , merentang M.

Subruang

Misalkan *V* adalah ruang vector pada medan K dan misalkan pula W adalah subhimpunan dari V. Maka W adalah *subruang* dari V jika W itu sendiri adalah ruang vector pada K yang menggunakan operasi penjumlahan vector dan operasi perkalian scalar pada ruang vector V.

Cara yang dapat digunakan untukmenunjukkan bahwa sebarang himpunan untuk sebarang himpunan W adalah ruang vector ialah dengan menunjukkan bahwa W memenuhi kedelapan aksioma mengenai ruang vector ( yang telah diuraikan di awal bab ini ). Meskipun demikian, jika W adalah subhimpunan di ruang vector V, maka beberapa aksioma tersebut telah berlaku di dalam V. Keriteria sederhana untuk menfgidentifikasi suatu subruang adalah sebagai berikut .

Teorema 4.2 : Anggaplah W adalah subhimpunan dari ruang vektor V. Maka W adalah subruang dari V jika dua syarat berikut terpenuhi :

(a) Vektor nol, 0, merupakan bagian dari W.

(b) Untuk setiap u, v ∈ W, k ∈ K:

(i) Jumlah u + v ∈ W, (ii) Kelipatan ku ∈ W

Sifat (i) di dalam (b) menyatakan bahwa W bersifat tertutup terhadap pen­jumlahan vektor, dan sifat (ii) di dalam (b) menyatakan bahwa W bersifat tertutup terhadap perkalian skalar. Kedua sifat ini dapat digabung menjadi sebuah pernyataan tunggal yang ekuivalen berikut ini:

(b') Untuk setiap u, v ∈ W, a, b, ∈, K, kombinasi linear au + bv ∈ W

Selanjutnya, misalkan V adalah sebarang ruang vektor. Maka V secara otomatis mempunyai dua subruang, yaitu himpunan {0} yang hanya terdiri dari vektor nol dan seluruh ruang V itu sendiri. Subruang-subruang ini kadang-­kadang disebut subruang trivial dari V. Contoh-contoh dari subruang nontrivial adalah sebagai berikut.

**Contoh 4.6.** Perhatikan ruang vektor V = R3

Misalkan U terdiri dari seluruh vektor di dalam R3 yang entri-entrinya sama;

dalam hal ini,

U = {(a, b, c): a = b = c}

Sebagai contoh (1, 1, 1), (-3, –3, –3), (7, 7, 7), dan (-2, –2, –2) adalah vektor-vektor di dalam U. Secara geometris, U adalah garis yang melalui titik asal 0 dan titik (1, 1, 1). Jelaslah bahwa 0 = (0, 0, 0) adalah bagian dari U, karena seluruh entri di dalam 0 adalah sama. Di samping itu, anggaplah *u* dan *v* adalah sebarang vektor di dalam *U*, katakanlah u = (a, a, a) dan v = (b, b, b). Maka, untuk sebarang skalar k ∈ R, berikut ini juga merupakan vektor­-vektor di dalam U :

u + v = (a + b, a + b, a + b) dan ku = (ka, ka, ka)

Sehingga U adalah subruang dari R3.

**Contoh 4.7.**

1. Misalkan V = Mn, n adalah ruang vektor yang terdiri dari matriks-matriks n x n; W1, adalah sub himpunan yang terdiri dari seluruh matriks segitiga (atas), dan W2 adalah sub himpunan yang terdiri dari seluruh matriks simetrik. Maka W1 adalah subruang dari V, karena W1, mengandung matriks nol 0 dan W, tertutup terhadap penjumlahan matriks dan perkalian skalar matriks, dalam hal ini, jumlah dan kelipatan skalar dari mahiks-matriks segitiga seperti ini juga berupa segitiga. Demikian pula, W2 adalah subruang dari V.
2. Misalkan V = P (t), yaitu ruang vektor P(t) yang terdiri dari polinomial­-polinomial. Maka ruang Pn(t) yang terdiri dari polinomial-polinomial dengan derajat paling besar *n* dapat dipandang sebagai subruang dari P(t). Misalkan Q(t) adalah kumpulan polinomial yang hanya mempunyai pangkat *t* yang genap. Sebagai contoh, berikut ini adalah polinomial­polinomial di dalam Q(t):

P1 = 3 + 4t2 – 5t6 dan P2 = 6 – 7t4 + 9t6 + 3t12

(Kita mengasumsikan bahwa sebarang konstanta k = kt0adalah sebuah pangkat genap dari t.) Maka Q(t) adalah subruang dari P(t).

Misalkan U dan W adalah subruang dari ruang vektor V. Kita dapat menunjukkan bahwa irisan U ∩ W juga merupakan subruang dari V. Jelaslah bahwa 0 ∈ U dan 0 ∈ W, karena U dan W adalah subruang; sementara 0 ∈ U ∩ W. Selanjutnya, anggaplah u dan v adalah bagian dari irisan U n W. Maka u, v ∈ U dan U, v ∈ W. Di samping itu, karena U dan W adalah subruang, untuk sebarang skalar a, b ∈ K, au + bv ∈ U dan au + bv ∈ W. Sehingga, au **+** bv ∈ U ∩ W. Dengan demikian U ∩ W adalah subruang dari V.

**Teorema 4.3**: Irisan dari berapa pun banyaknya subruang-subruang dari ruang vektor V adalah subruang dari V.

Perhatikan sistem persamaan linear AX = B dengan n variabel tidak diketahui. Maka setiap solusi u dapat dipandang sebagai sebuah vektor di dalam Kn. Sehingga, himpunan solusi dari sistem seperti ini adalah sub­himpunan dari K. Selanjutnya, anggaplah sistem tersebut homogen, dalam hal ini, anggaplah sistem ini berbentuk AX = 0. Misalkan W adalah himpunan solusinya. Karena A0 = 0, maka vektor nol 0 ∈ W. Di samping itu, anggaplah u dan v adalah bagian dari W. Maka u dan v adalah solusi-solusi dari AX = 0, atau dengan kata lain, Au = 0 dan Av = 0. Dengan demikian, untuk sebarang skalar a dan b, kita mempunyai A(au + bv) = aAu + bAv = a0 + b0 = 0 + 0 = 0. Sehingga au + by adalah bagian dari W, karena merupakan solusi dari AX = 0. Dengan demikian, W adalah subruang dari Kn.

**Teorema 4.4 :** Himpunan solusi Wdari sistem homogen *AX =* 0 dengan *n* variabel tidak diketahui adalah subruang dari .

Perlu ditekankan bahwa himpunan solusi dari sistem takhomogen AX = B bukan merupakan subruang dari Kn. Pada kenyataannya, vektor nol, 0, bukan merupakan bagian dari himpunan solusinya.

**Rentang Linear; Ruang Baris dari Matriks**

Anggaplah u1, u2, …, um adalah sebarang vektor di dalam ruang vektor V. Ingat kembali bahwa sebarang vektor yang berbentuk a1u1 + a2u2 + … + amum*,* di mana a1 adalah skalar, disebut kombinasi linear dari u1, u2, …, um. Kumpulan seluruh kombinasi linear seperti ini yang dinotasikan dengan rentang (ul, u2, ..., um) atau rentang (ui), disebut rentang linear (*linear span*) dari u1, u2, …, um­.

Vektor nol, 0, jelas merupakan bagian dari rentang (u1), karena

0 = 0u1 + 0u2 + … + 0um

Lebih jauh lagi, anggaplah *v* dan V adalah bagian dari rentang (u1), katakanlah

v = a1u1 + a2u2 + … + amum dan v’ = b1u1 + b2u2 + … + bmum

dan

kv = ka1u1 + ka2u2 + … + kamum

Sehingga *v + V* dan *kv* juga merupakan bagian dari rentang (ui). Dengan demikian, rentang (u) adalah subruang dari V.

Dalam uraian yang lebih umum, untuk sebarang subhimpunan *S* dari V, rentang (S) terdiri dari seluruh kombinasi linear vektor-vektor di dalam *S,* atau ketika *S =, 0,* maka rentang(S) = {O}. Sehingga, secara khusus *S* adalah himpunan rentangan dari rentang(S).

**Teorema 4.5:** Misalkan *S* adalah subhimpunan dari ruang vektor V.

1. Maka rentang(S) adalah subruang dari *V* yang mengandung *S.*
2. Jika *W* adalah submang dari V yang mengandung *S,* maka rentang (S) ⊆ *W.*

Syarat (ii) dalam Teorema 4.5 dapat diinterpretasikan dengan mengatakan bahwa rentang (S) adalah subruang "terkecil" dari V yang mengandung *S.*

**Contoh 4.8.** Perhatikan ruang vektor V = R3. Misalkan *u* adalah sebarang vektor taknol di dalam R3. Maka rentang(u) terdiri dari seluruh kelipatan skalar dari *u.*

Misalkan A=[] adalah sebarang matriks m x n pada medan K. Baris-baris dari A, = (, , …, ), = (, , …, ), …, = (dipandang sebagai vector-vektor di dalam sehingga baris-baris tersebut merentang subruang dari K^n yang disebut ruang baris dari A dan dinotasikan dengan ruang baris (A). Dalam hal ini, ruangbaris(A) = rentang(

Secara analogi, kolom-kolom dari A dapat dipandang sebagai vektor-vektor di dalam yang disebut *ruang kolom* dari A dan dinotasikan dengan ruangkolom(A). Perhatikan bahwa ruangkolom (A) = ruangabaris (.

Ingat kembali bahwaq matriks A dan matriks B adalah ekuivalen baris, ditulis A ~ B, jika B dapat diperoleh dari A dengan sederetan operasi baris elementer. Sekarang,anggaplah M adalah matriks yang diperoleh dengan menerapkan salah satu operasi baris elementer pada matricks A .maka tiap baris dari M adalah baris dari A atau kombinasi linear baris-baris dari A. Sehingga ruang baris dari M termasuk di dalam ruang baris dari A. Di sisi lain, kita dapat menerapkan operasi baris elementer invers pada M untuk memperoleh A; sehingga ruang baris dari A termasuk di dalam ruang baris dari M. Dengan demikian, A dan M mempunyai ruang baris yang sama. Hal ini bias berlaku setiap kali kita menerapkan sebuah operasi baris elemnter. Sehingga, kita mempunyai dua teorama berikut.

**Teorama 4.6:**  Matriks-matriks yang ekuivalen baris mempunyai ruang baris yang sama.

**Teorama 4.7:** Anggaplah A and B adalah matriks-matriks koninis baris. Maka A dan B mempunyai ruang baris yang sama jika dan hanya jika keduanya mempunyai baris-baristaknol yang sama.

**Contoh 4.9.** Perhatikan dua himpunan vector di dalam berikut ini:

(1, 2, -1, 3), = (2, 4, 1, -2), = (3, 6, 3, -7)

= (1, 2, -4, 11), = (2, 4, -5, 14)

Misalkan U = rentang () dan W = rentang ().

Maka terdapat dua caara untuk menunjukkan bahwa U = W

1. Tunjukkan bahwa tiap adalah kombinasi linear dari dan tunjukkan bahwa tiap adalah kombinasi linear dari Amati bahwa kita harus menunjukkan keenam sistem persamaan linear tersebut konsisten.
2. Bentuklah matriks A yang baris-barisnya adalah dan reduksi-barislah A menjadi bentuk koninis baris, dan bentuklah matriks B yang baris-barisnya adalah reduksi-baris-lah Bmenjadi bentuk kanonis baris:

A= ~ ~

B= ~ ~

Karena baris-baris taknol dari matrik-matriks yang berbentuk kanonis baris adalah identik, maka ruang baris dari A dan ruang baris dari B adalah sama. Dengan demikian U = W.

Jelaskan, metode (b) lebih efisien dibandingkan metode (a).

KEBEBASAN LINEAR dan KETAKBEBASAN LINEAR

Kita mengatakan vektor di dalam V adalah takbebas linear jika terdapat skalar-skalar di dalam K, yang tidak seluruhnya 0, sedemikan rupa sehingga

Jika tidak, maka kita mengatakan bahwa vektor-vektor tersebut bebas linear.

Definisi di atas dapat dinyatakan ulang sebagai berikut. Perhatikan persamaan vektor

Di mana x adalah scalar tidak diketahui. Persamaan ini selalu mempunyai solusi nol Anggaplah ini adalah satu-satunya solusi, yaitu, anggaplah kita dapat menunjukkan:

mengimplikasikan

Maka vector bebas linear. Di sisilain ,anggaplah persamaan (\*) mempunyai solusi taknol; maka vektor-vektor tersebut tak bebas linear.

Himpunan vektor-vektor S = {di dalam V adalah tak bebas linear atau bebas linear bergantung pada apakah vector tak bebas linear atau bebas linear

Sifat-sifat berikut ini secara langsung berasal dari definisi diatas.

1. Anggaplah 0 adalah salah satu dari vektor-vektor , katakanlah = 0. Maka vektor-vektor tersebut tak bebas linea, karena kita mempunyai kondisi linear berikut di mana koefisiendari ≠ 0:

1 = 1 .0 + 0 … +0=0

1. Anggaplah 0 adalah vector taknol. Maka v, karena vector itu sendiri, adalah bebas linear, Karena kv=0, v ≠ 0 mengimplikasikan k=0
2. Anggaplah dua dari vektor-vektor adalah sama atau salah satu vector merupakan kelipatan scalar dari vektorlainnya, katakanlah .Maka vektor-vektor tersebut pasti tak bebas linear, karena kita mempunyai kombinasi linear berikut dimana linear koefisien dari

0

1. Dua vector , saling tak bebas linear jika dan hanya jika salah satunya merupakan kelipatan dari vector lainnya.
2. Jika himpunan vektor-vektor S bebas linear, maka sebarang subhimpunan dari S bebas linear. Alternative lain, jika S mengandungs ubhimpunan tak bebas linear, maka S tak bebas linear.

Contoh 4.10

1. Misalkan u =( 1,1,0), v=(1,3,2), w=(4, 9, 5). Makau, v, w tak bebas linear, karena

3u+5v-2w = 3(1, 1, 0)+ 5(1, 3, 2)- 2(4, 9, 5) = (0, 0, 0)=0.

1. Kita dapat menunjukkan bahwa vector-vektor u=(1,2,3), v=(2, 5, 7), w=(1, 3, 5) bebas linear. Kita membentuk persamaan vectornya xu + yv + zw = 0, di mana x, y, z adalah skalar-skalar tidak diketahui. Proses ini menghasilkan

x+2y+z = 0 x+2y+z=0

x + yatau2x+5y+3z=0 atau y+z=0

3x+7y+5z=0 z=0

Substitusi balik menghasilkan x= 0, y=0, z=0. Kita telah menunjukan bahwa

Xu +yv +zw = 0 mengimplikasikan x= 0, y= 0, z= 0

Gagasan – gagasan tentang ketakbebasan linear dan kombinasi linear sangat berhubungan.Secara spesifik, untuk vektor yang lebih dari satu, kita telah menunjukkan bahwa vector, vector tak bebas linear jika dan hanya jika salah satu dari vektor-vektor tersebut merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya,

Maka dengan menambahkan pada kedua ruas tersebut, kita memperoleh

= 0

Di mana koefisien dari bukan 0. Dengan demikian vektor-vektor tersebut tak bebas linear. Sebaliknya, anggaplah vector-vektor tersebut tak bebas linear, katakanlah = 0, di mana≠ 0. Maka kita dapat menyelesaikan untuk memperoleh

=

Dan dengan demikian merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya.

Lemma 4.8: anggaplah dua atau lebih vektor-vektor tak nol tak bebas linear. Maka salah satu dari vektor-vektor tersebut merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor sebelumnya, yaitu terdapat k > 1 sedemikian rupa sehingga

Perhatikan matrik seselon A berikut, yang pivot-pivotnya telah diarsir :

A =

Amati bahwa garis R₂, R₃, R₄ mempunyai elemen-elemen 0 pada kolom kedua di bawah pivot taknol pada R₁, sehingga sebarang kombinasi linear dari R₂, R₃, R₄ harus mempunyai elemen 0 sebagai entri keduanya. Dengan demikian,R₁ bukan merupakan kombinasi linear dari baris-baris di bawahnya.Dengan cara serupa, baris R₃ dan R₄ mempunyai elemen 0 pada kolom ketiga dibawah pivot taknol pada R₂, sehingga R₂ bukan merupakan bukan merupakan kombinasi linear dari baris-baris di bawahnya. Akhirnya, R₃ bukan merupakan kelipatan dari R₄ karena R₄ mempunyai sebuah elemen 0 pada kolom kelima di bawah pivot taknol pada R₃. Dengan memandang baris-baris taknol dari bawah ke atas,R₄, R₃, R₂, R₁, maka tidak ada baris yang merupakan kombinasi linear dari baris-baris sebelumnya. Dengan demikian baris-baris tersebut bebas linear menurut Lemma 4.8.

Argumentasi yang menggunakan matriks eselon di atas dapat digunakan untuk baris-baris taknol dari sebarang matriks eselon. Sehingga kita memperoleh teroma yang sangat berguna berikut ini.

**Teorema 4.9:** Baris-baris taknol dari matriks yang berbentuk eselon adalah bebas linear.

Basis dan Dimensi

Himpunan vetkor-vektor = {₁, ₂, …., } adalah basis dari jika mempunyai dua sifat berikut: (1) merentang .

Pernyataan lainnya, himpunan vektor-vektor = {₁, ₂, …., } adalah basis dari jika setiap dapat ditulis secara unik sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basisnya.

**Teorema 4.10**: Misalkan adalah ruang vektor sedemikian rupa sehingga satu basis mempunyai elemen dan basis lainnya mempunyai elemen. Maka = .

Ruang vektor dikatakan atau ,ditulis dim = jika mempunyai sebuah basis dengan elemen. Teorema 4.10 menjelaskan bahwa seluruh basis dari mempunyai jumlah elemen yang sama, sehingga definisi ini terdefinisikan dengan baik.

Ruang vektor {0} didefinisikan berdimensi 0.

Anggaplah ruang vektor tidak mempunyai basis berhingga. Maka dikatakan .

Teorema 4.10 yang mendasar di atas merupakan konsekuensi dari “lemma penggantian” berikut.

**Lemma 4.11:** Anggaplah (₁, ₂, …., ) merentang , dan anggaplah (₁, ₂, …., ) bebas linear. Maka , dan direntang oleh himpunan yang berbentuk {₁, ₂, …., , ₁, ₂, …., }. Sehingga , secara khusus, atau lebih vektor di dalam tak bebas linear.

Amati pada lemma di atas bahwa kita telah mengganti sebanyak vektor dari vektor-vektor di dalam himpunan rentangan dari dengan vektor bebas dan masih tetap berupa himpunan rentangan.

Contoh-contoh Basis

Subbab ini akan menyajikan contoh-contoh basis yang penting dari beberapa ruang vektor utama yang muncul dalam uraian di atas.

() **Ruang vektor** : Perhatikan vektor di dalam berikut:

= (1, 0, 0, 0, …, 0, 0,), = (0, 1, 0, 0, …, 0, 0), …, = (0, 0, 0, 0, …, 0, 1)

Vektor-vektor ini bebas linear. (Sebagai contoh, vektor-vektor tersebut membentuk matriks yang berbentuk eselon.) Di samping itu, sebarang vektor = (, , …, ) di dalam dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di atas. Secara spesifik, = + + … + . Berdasarkan hal ini, vektor-vektor yang membentuk basis dari . Sehingga, (sebagaimana telah anda duga) berdimensi . Secara khusus, sebarang basis lainnya dari mempunyai elemen.

() **Ruang vektor M = yang terdiri dari seluruh matriks :** Keenam matriks berikut membentuk basis dari ruang vektor yang terdiri dari seluruh matriks 2 x 3 pada :

Dalam uraian yang lebih umum, dalam ruang vektor yang terdiri dari seluruh matriks , misalnya adalah matriks seperti ini akan membentuk basis dari yang disebut basis *biasa* atau basis *standar* dari . Dengan demikian, dim = *rs*

(c) **Ruang vektor**  **yang terdiri dari seluruh polynomial berderajat :** Himpunan

S = yang terdiri dari n + 1 polinimial adalah basis dari .

Secara spesifik, sebarang polynomial berderajat dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari pangkat-pangkat *t* ini, dan kita dapat menunjukan bahwa polynomial-polinomial ini bebas linear. Dengan demikian,

Tiga teorema berikut ini akan sering digunakan pada uraian-uraian selanjutnya.

**Teorema 4.12**: Misalnya *V* adalah ruang vektor berdimensi berhingga *n.*

Maka:

1. Sebarang *n* + 1 atau lebih vektor pada *V* tak bebas linear.
2. Sebarang himpunan bebas linear dengan *n* elemen adalah basis dari *V.*
3. Sebarang himpunan rentangan dari *V* dengan *n* elemen adalah basis dari *V*.

**Teorema 4.13**: Anggaplah *S* merentang ruang vektor *V*. Maka:

1. Sebarang jumlah maksimum dari vektor-vektor bebas linear pada *S* membentuk basis dari *V*.
2. Anggaplah setiap vektor, yang merupakan kombinasi linear dari vector-vektor sebelumnya pada *S*, dapat dihapus dari *S*. Maka, vektor-vektor sisanya membentuk basis dari *V*.

**Teorema 4.14**: Miaslkan *V* adalah ruang vector berdimensi berhingga dan misalkan adalah himpunan vektor-vektor bebas linear pada *V*. maka *S* adalah bagian dari basis *V*; dalam hal ini *S* dapat diperluas menjadi basis dari *V*.

**Contoh 4.11.**

1. Keempat vekor di dalam berikut ini membentuk matiks yang membentuk matriks yang berbentuk eselon:

(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)

1. *n* + 1 polinomial pada berikut ini mengalami kenaikan derajat:

tidak terdapatnya polynomial yang merupakan kombinasi dari polinomial- polynomial sebelumnya, sehingga polinomial- polynomial tersebut membentuk basis dari , karena dim

1. Perhatikan sebarang empat vektor di dalam**;** misalnya

(1, 2, 3), (-2, 3, 4), (5, -2, 7), (13, 3, -8)

Berdasarkan Teorema 4.12(i), keempat vector ini pasti tak bebas linear, karena berasal dari ruang vektor berdimensi-3 **.**

Teorema berikut menguraikan hubungan dasar antara dimensi ruang vektordengan dimensi subruang.

**Teorema 4.15:** Misalkan *W* adalahsubruang dari ruang vector v yang berdimensi *n*. Maka Secara khusus, jika dim*W = n*, maka *W = V*.

**Contoh 4.12.** Misalkan*W* adalah subruang dari ruang real Perhatikan bahwa dimTeorema 4.16 menjelaskan bahwe dimensi dari *W* hanya bias 0, 1, 2, atau 3. Dengan demikian, kasus” berikutini berlaku:

1. dim*W* = 0, maka *W =* {0} adalah sebuah titik.
2. dim*W* = 1, maka *W* adalah garis yang melalui titik asal 0
3. dim*W* = 2, maka *W* adalah bidang yang melalui titik asal 0
4. dim*W* = 3, maka *W* adalah seluruh ruang

**Rank dari Matriks**

*Rank* dari matriks *A*, ditulis *Rank(A),* sama dengan jumlah maximum baris” bebas linear dari matriks *A* atau, secara ekuivalen, dimensi ruang baris matriks *A*.

Torema 4.16 : jumlah maksimum baris-baris bebas linier dari sebarang matriks *A* sama dengan jumlah maksimum kolom-kolom bebas linear dari matriks *A*. sehingga dimensi ruang baris matriks A sama dengan dimensi ruang kolom matriks *A .*

Berdasarkan teorema ini,kita dapat menyatakan ulang definisi mengenai rank dari *A* di ats dengan menggunakan kolom, dan bukanya menggunakan baris.

Bentuk eselon dari sebarang matriks *A* menghasilkan solusi untuk soal-soal tentang *A* itu sendiri.Secara spesifik, misalkan *A* dan *B* adalah matriks-matriks berikut ini, di mana matriks eselon *B* (yang pivotnya diarsir) adalah bentuk eselon dari *A*:

A =

Kita dapat menyelesiakan empat soal tentang matriks *A* berikut, di mana , …, , menotasikan kolom-kolomnya:

1. Tentukan basis dari ruang baris matriks *A.*
2. Tebtukan tiap kolom matriks *A* yang merupakan kombinasi linear dari kolom-kolom matriks *A* sebelumnya.
3. Tentukan basis dari ruang kolom matriks *A.*
4. Tentukan rank dari *A.*
5. Telah diketahui bahwa *A* dan *B* adalah ekuiavalen baris, sehingga kedua matriks ini mempunyai ruang baris yang sama. Di samping itu,*B*  berbentuk eselon, sehingga baris-baris taknolnya bebas linear dan oleh karena itu membentuk basis dari ruang baris matriks *B*. sehingga matriks-matriks ini juga membentuk basis dari ruang baris matriks *A*. dalam hal ini,

Basis dari ruang baris (*A*): (1, 2, 1, 3, 1, 2), (0, 1, 3, 0, 2, 1), (0, 0, 0, 1, 1, 2)

1. Misalkan = [, , . . .,] adalah submatriks dari *A* yg terdiri dari *k* kolom pertama matriks koefisien dan matriks *A*. maka dan masing-masing adlah matriks koefisien dan matriks yang diperbesar dari persamaan vektor

+ + … + =

Teorema 3.8 menjelaskan bahwa system ini mempunyai sebuah solusi,atau secara ekuivalen, adalah kombinasi linear dari kolom-kolom matriks *A* sebelumnya jika dan hanya jika rank() = rank(), dimana rank() berarti banyaknya pivot di dalam bentuk eselon dari .sekarang, matriks yang dibentuk oleh *k* kolom pertama matriks eselon *B* juga merupakan bentuk eselon dari . Oleh karena itu, rank() = rank() = 2dan rank() = rank() = rank() = 3. Dengan demikian, , , masing-masing adalah kombinasi linear dari kolom-kolom matriks *A* sebelumnya.

1. Fakta bahwa kolom-kolom yang lainnya, , , , bukan merupakan kombinasi linear dari kolom-kolom sebelumnya yang terkait, juga menjelaskan bahwa kolom-kolom ini bebas linear. Dengan demikian, kolom-kolom tersebut membentuk basis dari ruang kolom matriks *A*.dalam hal ini

Basis dari ruang kolom(*A*): [ 1, 2, 3, 1, 2, [2, 5, 7, 5, 6,, [3, 6, 11, 8, 11

Amati bahwa , , juga dapat dicirikan sebagai kolom-kolom matriks *A* yang

Mengandung pivot-pivot di dalam sebarang bentuk eselon dari *A*.

1. Di sini kita melihat bahwa tiga definisi yang mungkin untuk rank dari *A* menghasilkan nilai yang sama.
2. Terdapat tiga pivot pada *B*, yang merupakan bentuk eselon dari *A*.
3. Ketiga pivot pada *B* bersesuaian dengan baris-baris taknol dari *B*, yang membentuk basis dari ruang baris matriks *A*.
4. Ketiga pivot pada *B* bersesuaian dengan kolom-kolom matriks *A*, yang membentuk basis dari kolom matriks *A*.

Sehingga rank(*A*) = 3.

Informasi yang diketahui pada soal yang kita kerjakan seringkali berupa daftar *S* ={} yang terdiri dari vector – vector didalam dan kita harus menentukan basis untuk sub runag W dari yang direntang oleh vector-vektor yang diketahui, yaitu, basis dari W = rentang (S) = rentang (). Dua algoritma berikut, yang pada dasarnya telah diuraikan di atas, menetukan basis dari W seperti ini (dan juga menentukan dimensi dari W).

Algoritma 4.1 (Algoritma ruang baris)

Tahap 1. Bentukklah matriks M yang baris – barisnya adalah vector – vector yang diketahui.

Tahap 2. Reduksi barislah M menjadi bentuk eselon.

Tahap 3. Tentukan outputnya yang berupa baris – baris taknol dari matriks eselon tersebut.

Kadang kadang kita bermaksud untuk menentukan sebuah basis yang berasaldari vector – vector asal yang telah diketahui.ALgoritma berikut dapat digunakan unutk tujuan ini.

**ALgoritma 4.2 (Algoritma “melempar keluar”)**

**Tahap 1.** Bentuk matriks M yang kolom kolomnya adalah vector vector yg telah diketahui

**Tahap 2.** Reduksi-barislah M menjadi bentuk eselon

**Tahap 3.** Untuk tiap kolom didalam matriks eselon tersebut yang tidak mempunyai pivot, hapuslah (“lempar kaluar”) vector dari daftar S yg terdiri dari vector vector yg diketahui.  
**Tahap 4.** Tentukan output yg berupa vector vector sisa di dalam S (yg sesuai dengan kolom – kolom yg mempunyai pivot).

Contoh 4.13. misalkan W subruang **dari** yg direntang oleh vektor – vektor berikut :

= (1,2,1,3,2) = (1,3,3,5,3) = (3,8,7,13,8)

= (1,4,6,9,7) = (5,13,13,25,19)

Tentukan basis dari W yg terdiri dari vektor – vektor asal yg diketahui dan di tentukan dimW.

Bentuklah matriks M yg kolom kolomnya adalah vektor yg telah diketahui dan reduksilah M menjadi bntuk eselon:

= ~

Pivot pivot di dalam matriks eselon tersebut muncul di dalam kolom , , . berdasarkan hal ini , kita dapat “melempar keluar” vektor dan vektor dari lima vektor asalnya. Vektor sisanya, yg bersesuaian dengan kolom kolom di dalam matriks eselon yg mempunyai pivot, membentuk basis dari W . sehingga, secara khusus, dimW = 3.

Perhatikan kembali system persamaan linear homogeny AX = 0 pada K dengan nvariabel tidak di ketahu . dengan menggunakan Teorema 4.4, himpunan solusi W dari system seperti ini merupakan sebruang dari , sehingga W mempunyai sebuah dimensi . Teorema berikut ini berlaku.

**Teorema4.17:** Dimensi ruang solusi W dari system homogeny AX = 0 adalah n-r, di mana *n* adalah jumlah variabeltidak di ketahui dan *r* adalahrank dari matriks koefisien A.

Jumlah dan Jumlah Langsung

Misalkan *U* dan *W* adalah subhimpunan dari ruang vektor *V* . Jumlah *U* dan *W* , ditulis *U*+*W* , terdiri dari seluruh jumlah *u+w*  dimana u £ U dan w W . Dalam hal ini , U + W = { v:v = u + w , dimana u £ U dan w £ W }

Sekarang anggaplah U dan W adalah subruang dari V . maka kita dapat dengan mudah menujukan bahwa U+W adalah subruang dari V . ingat kembali bahwa U Ω W adalah subruang dari V . teorema berikut ini menghubungkan dimensi dimensidarisubruangtersebut.   
  
**Teorema 4.18:** anggaplah U dan W adalah subruang berdimensi berhingga dari ruang vekor V . maka U + W berdimensi berhingga dan dim( U + W ) = dim U + dim W – dim (U Ω W)

**Contoh 4.14**. misalkan V = adalah ruang vektor yg terdiri dari matriks – matriks 2 x 2. Misalkan U terdiri dari matriks matriks tersebut yg baris keduanya adalah nol, dan misalkan W terdiri dari matriks matriks tersebut yg kolom keduannya adalah nol. Maka

U = , W = dan U+W = , U Ω W =

Dalam hal ini , U + W terdiri dari matriks –matriks tersebut yg ebtri kanan bawahnya adalah 0, dan U Ω W terdiri dari matriks matriks tersebut yg baris kedua dan kolom keduanya adalah nol. Perhatikan bahwa dim U = 2 , dimW= 2 , dim(U Ω W) = 1. Demikian pula, dim(U + W) = 3 , yg telah diduga dari Teorema 4.18. dalam hal ini , dim(U + W) = dimU + dimW – dim(U Ω W) = 2 + 2 – 1 = 3

Ruang vektor V dikatan merupakan jumlah langsung dari subruang U dan subruang W-nya , dinotasikan dengan V = U + W jika setiap v £ V dapat ditulis dalam satu dan hanya satu cara sebagai v = u + w di mana u U dan w ∊ W.**Teorema 4.19:** Ruang vector V adlah jumblah langsung dari subruang U dan subruang W-nya jika dan hanya jika: (i) V= U+W,(ii) U W = .

Contoh 4.15 Perhatikan ruang vector V =

1. Misalkan U adalah bidang xy dan misalkan W adalah bidang yz;

Dalam hal ini,

U= { (a, b, 0): a, b ∊ R} dan W = { (0, b, c):b, c ∊ R}

Maka = U + W,karena setiap vector pada adalah jumblah dari sebuah vector pada U dan sebuah vector pada W. Meskipun demikian, bukan merupakan jumblah langsung dari U dan W, karena jumblah seperti ini tidak unik. Sebagai contoh,

(3, 5, 7) = (3, 1, 0) + (0, 4, 7)

Dan juga

(3, 5, 7) = (3, -4, 0) + (0, 9, 7)

1. Misalkan U adalah bidang xy dan misalkan W adalah sumbu z;

Dalam hal ini

U = { (a, b, 0): a, b ∊ R } dan W = { (0, 0, c): c R } .

Sekarang, sebarang vector (a, b, c) ∊ dapat ditulis sebagai jumblah dari sebuah vector pada U dan sebuah vector pada W dengan satu dan hanya satu cara:

(a, b, c) = (a, b, 0) + (0, 0, c)

Oleh karena itu, adalah jumblah langsung dari U dan W; yaitu, = U + W.

Gagasan dari jumlah langsung dapat diperluas untuk kasus dengan lebih dari satu factor dengan menggunakan cara biasa. Dalam hal ini, V dalah jumblah dari subruang-subruang …, ditulis

V = + + ... +

Jika setiap vector v ∊ V dapat ditulis dalam satu dan hanya satu cara sebagai V =

+ + … + dimana ∊ ∊ , …, ∊

**Teorema 4.20:** Anggaplah V = + + … + demikian pula, untuk setiap k anggaplah sebagai subhimpunan bebas linear dari Maka:

1. Gabungan S = adalah bebas linear di dalam V.
2. Jika tiap adalah basis dari maka adalah basis dari V.
3. dimV = dim + dim + … +

**Teorema 4.21:** Anggaplah V = + + … + dan dimV = dim

Maka V = … .